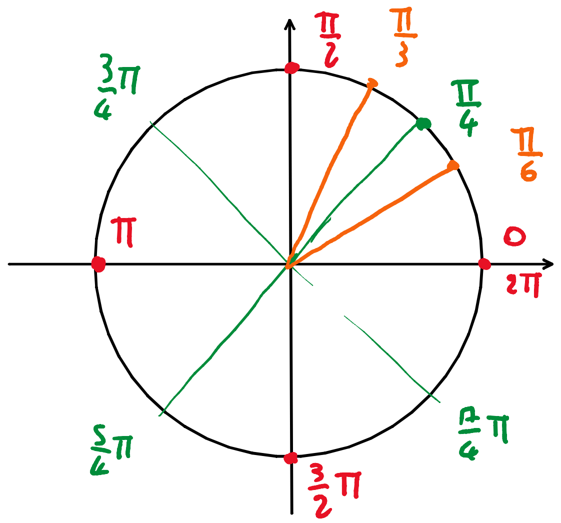
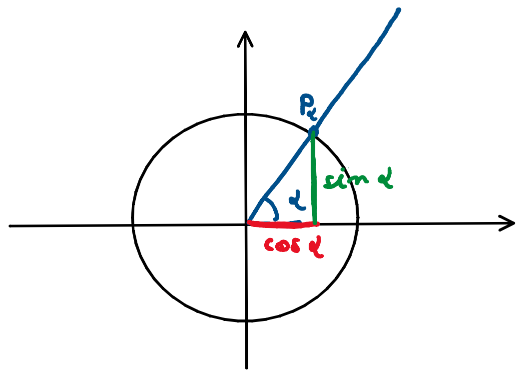
Def: Sia $x \in \mathbb{R}$ e sia $\Gamma(x)$ l'arco (di lunghezza x) sulla circonferenza goniometrica che corrisponde all'angolo di ampiezza in radianti pari ad x. Sia P_x il punto finale di $\Gamma(x)$. Le coordinate di P_x in $\mathbb{R}^2$ si dicono COSENO e SENO di x.

x	$\cos x$	$\sin x$
0	1	0
$\frac{\pi}{2}$	0	1
π	-1	0
$\frac{3}{2}\pi$	0	-1
2π	1	0
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
$\frac{3}{4}\pi$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
$\frac{5}{4}\pi$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$
$\frac{7}{4}\pi$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$





FORMULE DI ADDIZIONE E SOTTRAZIONE

$\forall\, x, y \in \mathbb{R}$:

1) $\cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \sin y$
2) $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$.
3) $\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$
4) $\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$

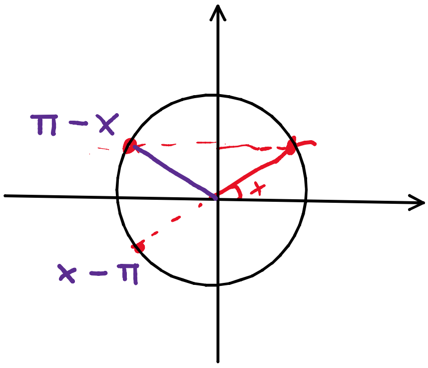
Casi particolari:

- $\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$
- $\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \cos x$
- $\cos(x+\pi) = -\cos x$
- $\sin(x+\pi) = -\sin x$
- $\cos(\pi - x) = -\cos x$
- $\sin(\pi - x) = \sin x$
- $\cos(x-\pi) = -\cos x$
- $\sin(x-\pi) = -\sin x$
- $\sin(x+\pi-y) = \sin((x-y)+\pi)$

$$= -\sin(x-y).$$

$$= -(\sin x \cos y - \cos x \sin y)$$

$$= -\sin x \cos y + \cos x \sin y.$$



FORMULE DI DUPLICAZIONE

$\forall x \in \mathbb{R}$:

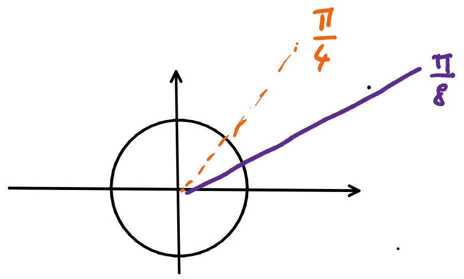
1) $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$
2) $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$

FORMULE DI BISEZIONE

$\forall x \in \mathbb{R}$:

1) $\cos\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}} \quad \vee \quad \cos\frac{x}{2} = -\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$
2) $\sin\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}} \quad \vee \quad \sin\frac{x}{2} = -\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}.$

$$\cos\frac{\pi}{8} = \cos\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4}\right)$$



$$= \sqrt{\frac{1+\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}{2}} = \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{(\sqrt{2}+1)\cdot\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}}$$

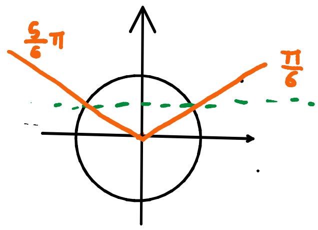
$$= \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

$$\sin\left(\frac{5}{12}\pi\right) = \sin\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{6}\pi\right) \qquad x = \frac{5}{6}\pi$$

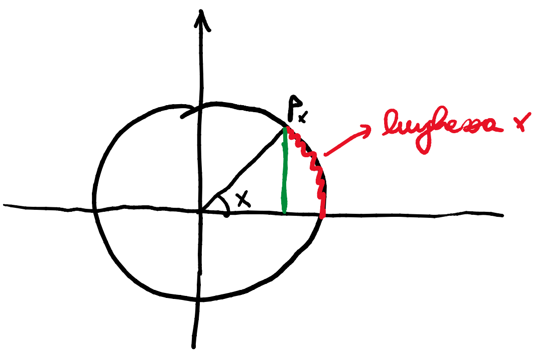
$$= \sqrt{\frac{1-\cos\left(\frac{5}{6}\pi\right)}{2}}$$

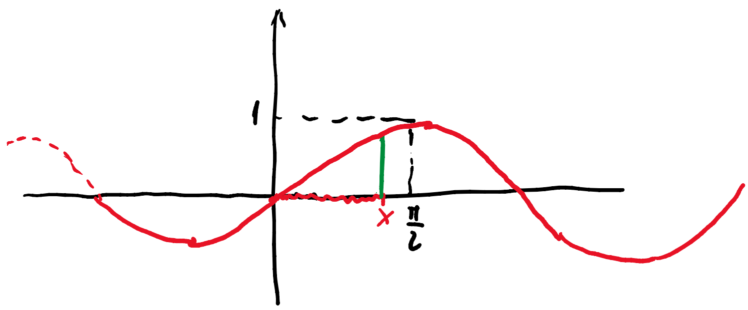
$$= \sqrt{\frac{1-\cos\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)}{2}} = \sqrt{\frac{1+\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}}$$

$$\boxed{\cos\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)}$$



Il seno e il coseno come funzioni

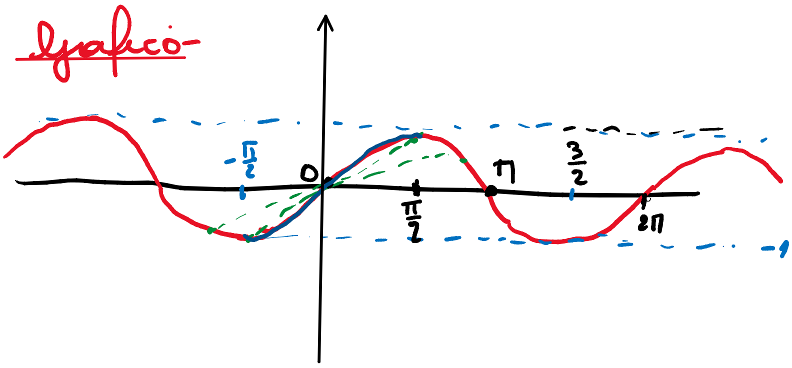




FUNZIONE SENO

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \operatorname{sen} x$$

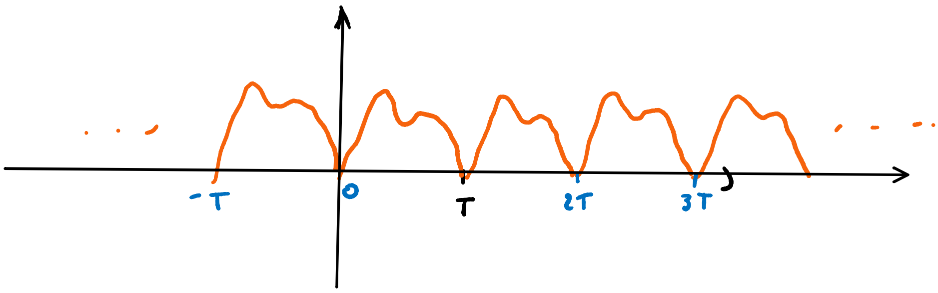
grafico



- $Dom(f) = \mathbb{R}$
- $f(\mathbb{R}) = [-1, 1]$
- f è dispari
- $\operatorname{sen} x$ è una funzione periodica di periodo 2π

Def: Sia $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione. Si dice che f è periodica se $\exists\, T > 0$ tale che
$$\forall x \in \mathbb{R}: \quad f(x+T) = f(x).$$
Il più piccolo T per cui vale questa proprietà si dice PERIODO (MINIMO) di f.

Se si vuole disegnare il grafico di una funzione periodica basta farlo su un intervallo di lunghezza T.

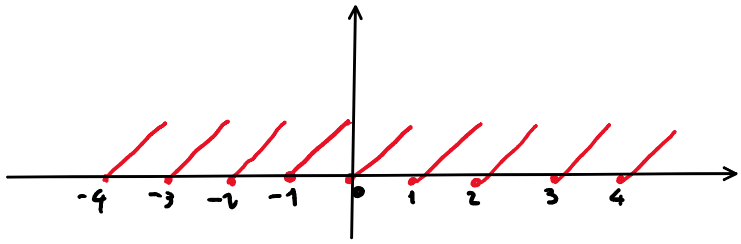


Nota: Se $f: X \longrightarrow \mathbb{R}$ con $X \subseteq \mathbb{R}$ f è periodica se $\exists\, T > 0$ t.c.
1) $\forall x \in X: \ x + T \in X$
2) $f(x+T) = f(x)$

- <u>Approfondimento</u>:

funzione MANTISSA

$f(x) = x - \max\{ n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x \}$



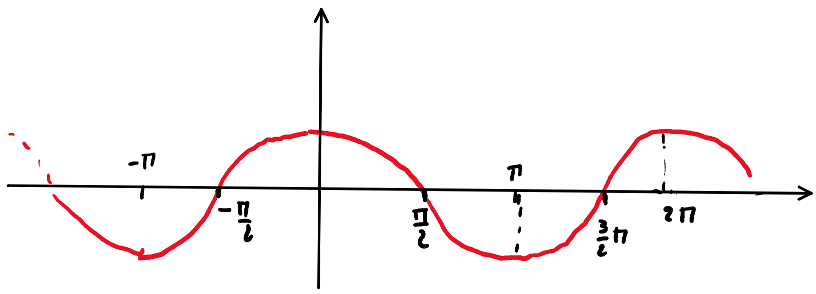
$f(2,3) = 2,3 - 2 = 0,3$

$f(3,3) = 3,3 - 3 = 0,3$

$f(-0,3) = -0,3 - (-1) = 0,7$

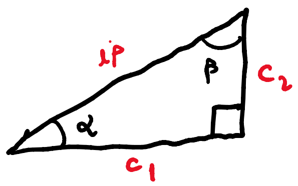
Funzione coseno

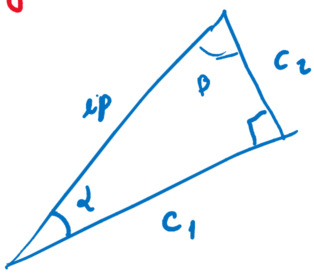
$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \cos x \end{array}$$



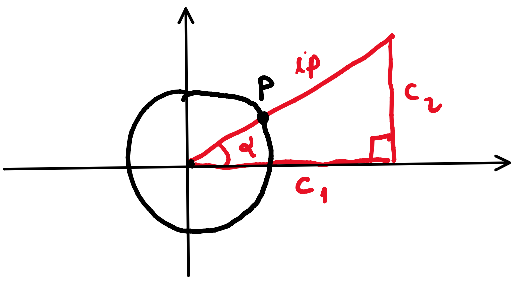
- $Dom(f) = \mathbb{R}$
- $f(\mathbb{R}) = [-1, 1]$
- f è pari.
- f è periodica di periodo 2π.

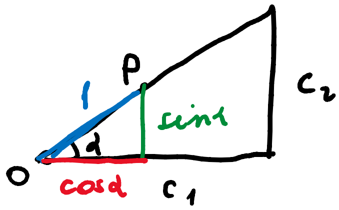
Seno e coseno nei triangoli rettangoli





Si può sempre riflettere e ruotare il triangolo in modo tale che il vertice che corrisponde ad α sia l'origine e il cateto adiacente ad α sia sul semiasse positivo delle x.





Proporzioni tra i triangoli:

$$\frac{1}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{ip}{c_2} \implies c_2 = ip \sin\alpha$$

$$\frac{1}{\cos\alpha} = \frac{ip}{c_1} \implies c_1 = ip \cdot \cos\alpha$$

Ricordare

Consideriamo un triangolo rettangolo e un suo angolo $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$. Allora:

- la lunghezza del cateto adiacente ad α è uguale al prodotto tra la lunghezza dell'ipotenusa e $\cos\alpha$

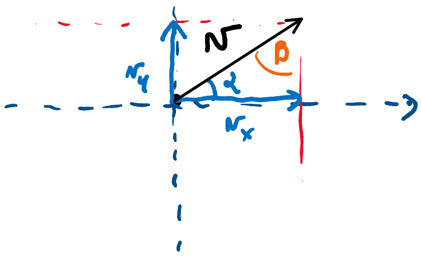
$$c_1 = ip \cdot \cos\alpha$$

- la lunghezza del cateto opposto ad α è uguale al prodotto tra la lunghezza dell'ipotenusa e $\cos\alpha$

$$c_2 = ip \cdot \cos\alpha$$

Applicazione alla fisica:

Ogni vettore nel piano si può scomporre in componenti lungo due direzioni perpendicolari.



$v_x = v \cdot \cos\alpha$

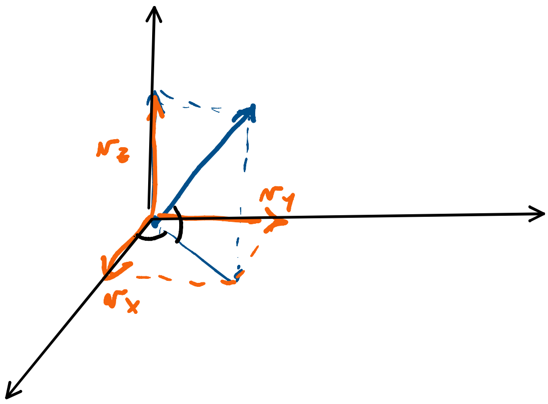
$v_y = v \cdot \sin\alpha$

oppure

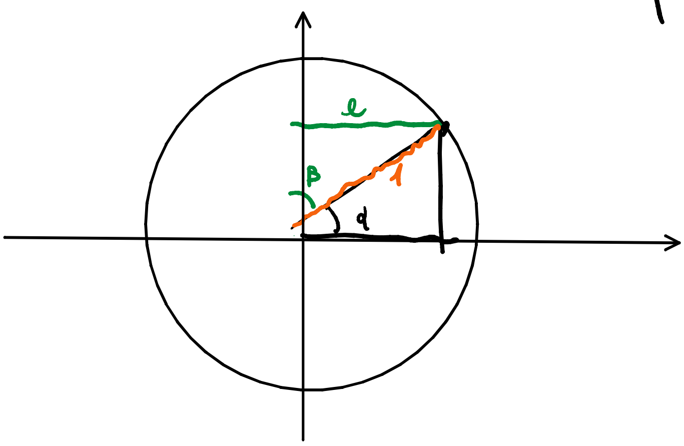
$v_x = v \cdot \sin\beta$

$v_y = v \cdot \cos\beta$.

In $\mathbb{R}^3$ servono tre direzioni ortogonali.



Attenzione a non confondere gli angoli



$l = \operatorname{sen}\beta = \cos\alpha$